PAVAGES APÉRIODIQUES: DES FRACTALES AU CALCUL

Léo Paviet Salomon

GREYC, Université Caen-Normandie

GREYC
Electronics and Computer Science Laboratory

Normandie Université

UNICAEN

ENSI CAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

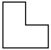
cnrs

Pavages

Objet d’étude: les *pavages*.

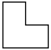
Pavages

Objet d'étude: les *pavages*.

- Ensemble de *tuiles*:  ou 

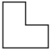
Pavages

Objet d'étude: les *pavages*.

- Ensemble de *tuiles*:  ou 
- Règles locales d'adjacence: couleurs, "pièce de puzzle" ...

Pavages

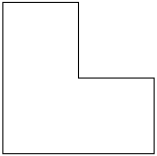
Objet d'étude: les *pavages*.

- Ensemble de *tuiles*:  ou 
- Règles locales d'adjacence: couleurs, "pièce de puzzle" ...

Objectif

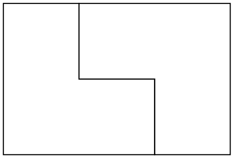
Faire un pavage valide (= qui respecte ces contraintes) et recouvrant le plan

Exemple de la chaise, une seule tuile + rotations

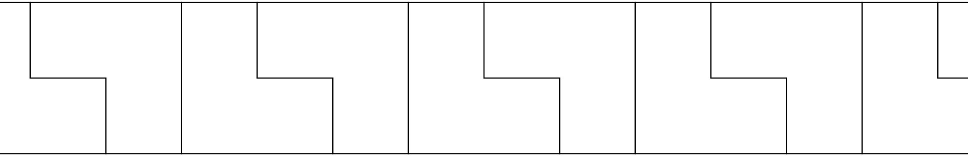


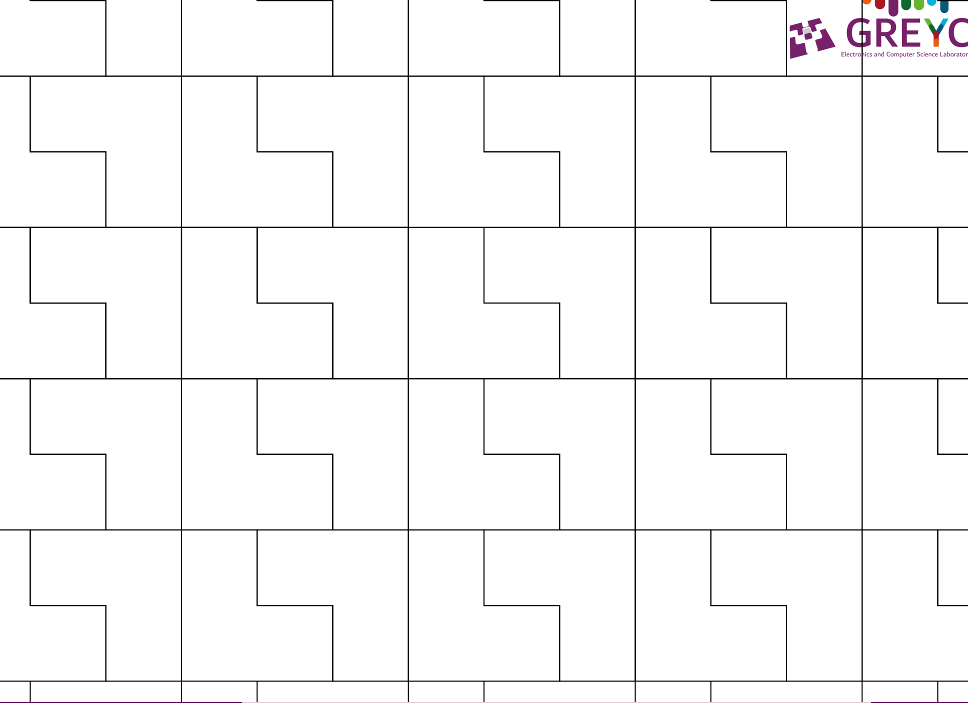
Electronics and Computer Science Laboratory

Exemple de la chaise, une seule tuile + rotations

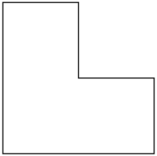


Exemple de la chaise, une seule tuile + rotations

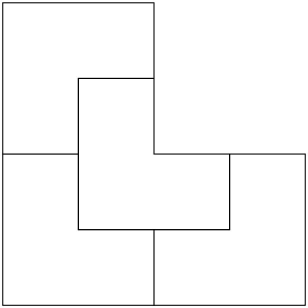


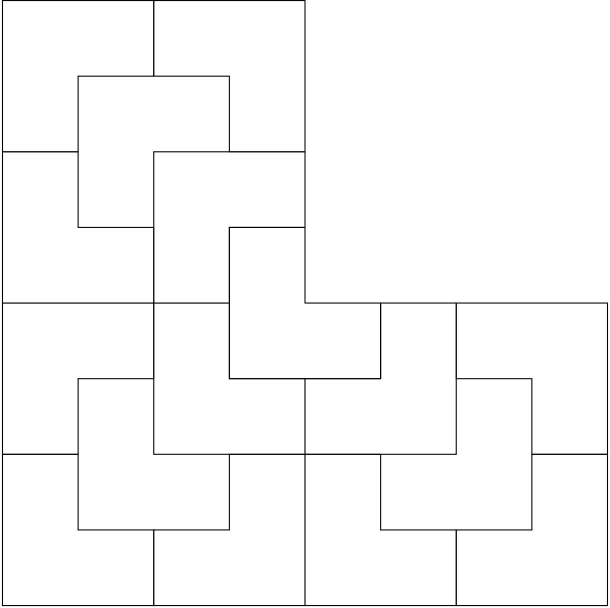


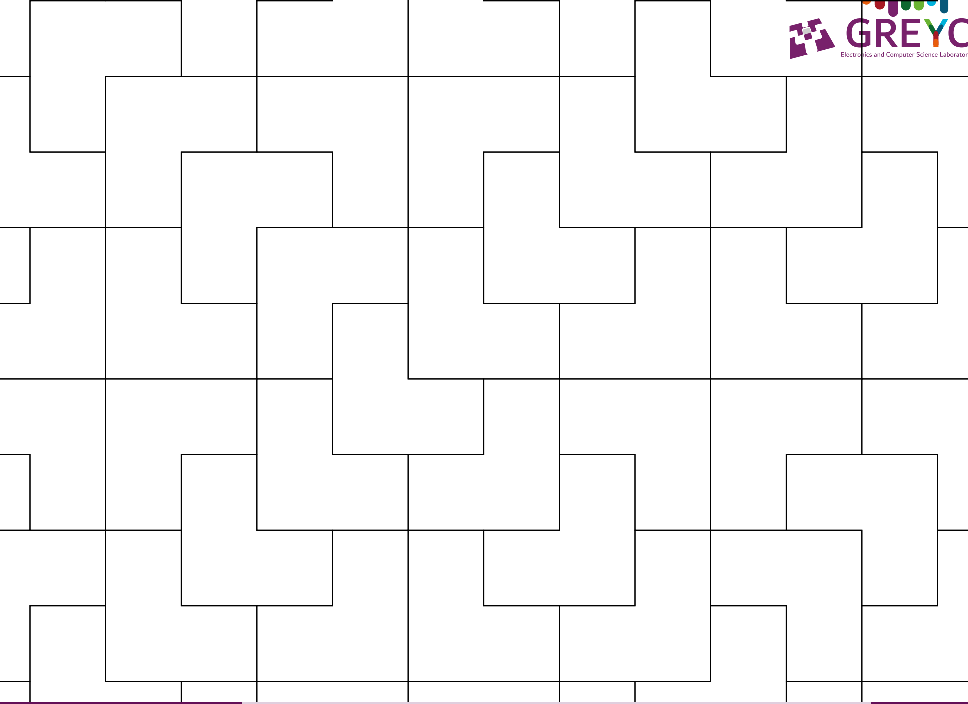
Autre pavage possible:



Autre pavage possible:







Différence importante entre ces deux pavages:

Différence importante entre ces deux pavages:
Le premier est *périodique* = un seul motif répété horizontalement et verticalement.

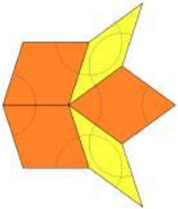
Différence importante entre ces deux pavages:
Le premier est *périodique* = un seul motif répété horizontalement et verticalement.

Question

Est-il possible que *tout* pavage valide avec un certain jeu de tuiles soit apériodique ?

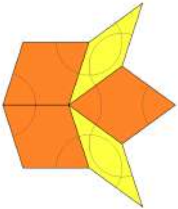
Penrose (*circa* 1970)

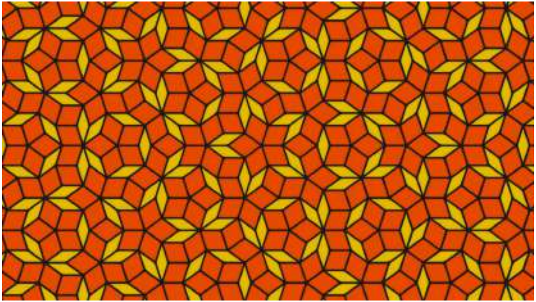
Pavage de Penrose: deux tuiles, des losanges marqués.



Penrose (*circa* 1970)

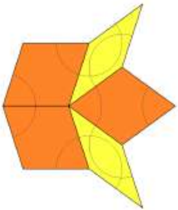
Pavage de Penrose: deux tuiles, des losanges marqués.

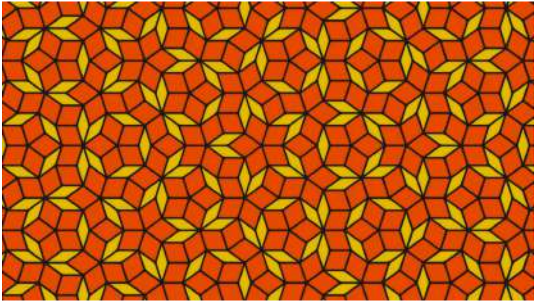




Penrose (*circa* 1970)

Pavage de Penrose: deux tuiles, des losanges marqués.

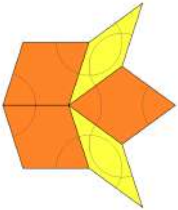


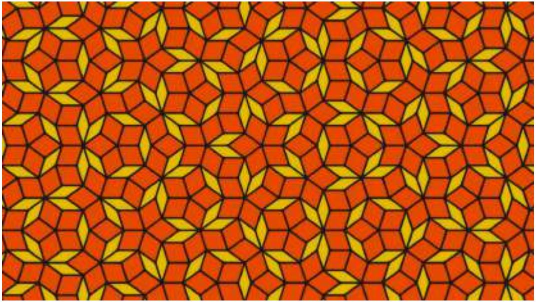


Egalement obtenu par *substitution* ("zoom + découpe")

Penrose (*circa* 1970)

Pavage de Penrose: deux tuiles, des losanges marqués.



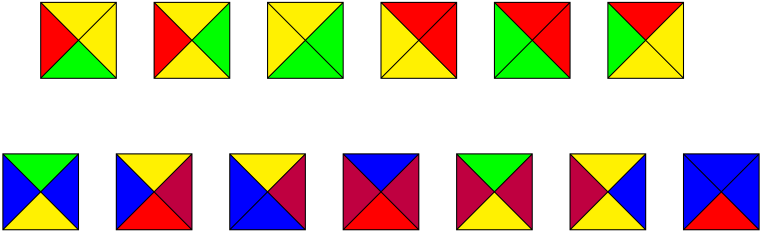


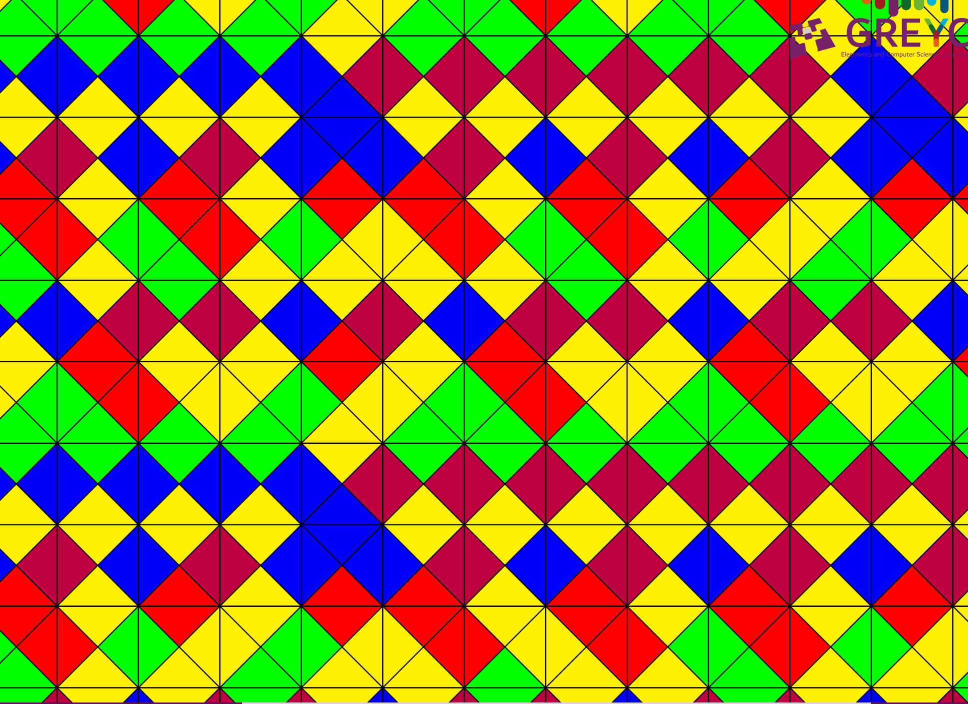
Egalement obtenu par *substitution* ("zoom + découpe")

Question bis

Est-il possible d’avoir un jeu de tuiles dont tous les pavages seraient apériodiques, mais pas substitutifs ?

Pavage de Kari-Culik (1995)





Multiplications de réels

Idées:

Multiplications de réels

Idées:

- Chaque ligne va représenter un nombre réel x

Multiplications de réels

Idées:

- Chaque ligne va représenter un nombre réel x
- Au-dessus d'une ligne x, on a soit $2x$, soit $\frac{2x}{3}$

Multiplications de réels

Idées:

- Chaque ligne va représenter un nombre réel x
- Au-dessus d'une ligne x, on a soit $2x$, soit $\frac{2x}{3}$

On passe donc d'une ligne à l'autre en multipliant par 2 ou $\frac{2}{3}$

Multiplications de réels

Idées:

- Chaque ligne va représenter un nombre réel x
- Au-dessus d'une ligne x, on a soit $2x$, soit $\frac{2x}{3}$

On passe donc d'une ligne à l'autre en multipliant par 2 ou $\frac{2}{3}$
$\Rightarrow$ aucune période verticale, car 2 et 3 sont premiers entre eux.

Et les périodes horizontales ?

Périodes horizontales éliminées grâce à la représentation choisie.

Et les périodes horizontales ?

Périodes horizontales éliminées grâce à la représentation choisie.

- un réel $x \iff$ une suite infinie $(u(x))_{n\in\mathbb{Z}}$

Et les périodes horizontales ?

Périodes horizontales éliminées grâce à la représentation choisie.

- un réel $x \iff$ une suite infinie $(u(x))_{n\in\mathbb{Z}}$
- éléments de la suite: $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1$

Et les périodes horizontales ?

Périodes horizontales éliminées grâce à la représentation choisie.

- un réel $x \iff$ une suite infinie $(u(x))_{n\in\mathbb{Z}}$
- éléments de la suite: $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1$
- les blocs $(u(x))$ ont une valeur moyenne tendant vers x: $u(\pi)$ est donc une suite de 3 et de 4, avec environ 14.15% de 3.

Et les périodes horizontales ?

Périodes horizontales éliminées grâce à la représentation choisie.

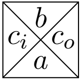
- un réel $x \iff$ une suite infinie $(u(x))_{n\in\mathbb{Z}}$
- éléments de la suite: $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1$
- les blocs $(u(x))$ ont une valeur moyenne tendant vers x: $u(\pi)$ est donc une suite de 3 et de 4, avec environ 14.15% de 3.
- Si $x \notin \mathbb{Q}$, cette suite est nécessairement apériodique

Multiplication ?

La multiplication fonctionne presque normalement: bit à bit, avec des retenues !

Multiplication ?

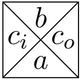
La multiplication fonctionne presque normalement: bit à bit, avec des retenues !
Chaque tuile est de la forme suivante:



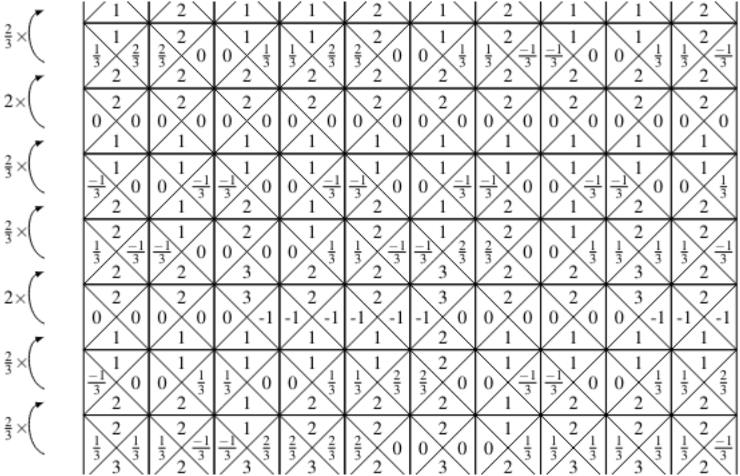
avec $aq + c_i = b + c_o$ (multiplie a par $q \in \{2, \frac{2}{3}\}$, ajoute la retenue c_i et produit la retenue c_o).

Multiplication ?

La multiplication fonctionne presque normalement: bit à bit, avec des retenues !
Chaque tuile est de la forme suivante:



avec $aq + c_i = b + c_o$ (multiplie a par $q \in \{2, \frac{2}{3}\}$, ajoute la retenue c_i et produit la retenue c_o).
La représentation de x = le bas de la ligne, celle de qx en haut, et les retenues se propagent horizontalement.



2/3 ×
2 ×
2/3 ×
2/3 ×
2 ×
2/3 ×
2/3 ×