Indécidabilité des invariants géométriques dans les pavages

Léo Paviet Salomon, sous la direction de Pascal Vanier

GREYC
Université de Caen-Normandie

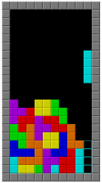
17 Décembre 2024

Plan

Contexte et premières définitions

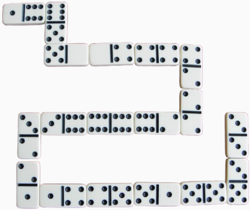
Premières intuitions

Pavages : formalisation possible de “règles d’assemblage”:



- Locales
- Homogènes

Cas le plus courant : assemblage disposé selon une ligne ou une grille.



Définition

Alphabet : ensemble fini de symboles

$$\mathcal{A} = \{ \blacksquare, \blacksquare \}$$

Un ensemble $\mathcal{F}$ de motifs (finis) interdits :

Définition

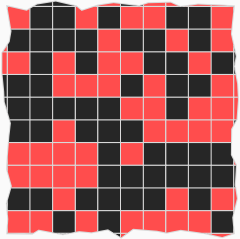
Alphabet : ensemble fini de symboles

$\mathcal{A} = \{$ ,  $\}$

Un ensemble $\mathcal{F}$ de motifs (finis) interdits :

$$\mathcal{F} = \emptyset$$

Configuration : $\mathcal{A}$-coloriage de $\mathbb{Z}^d$ sans motif interdit



Définition

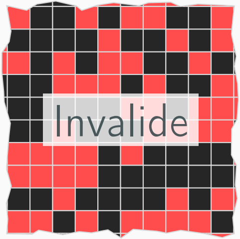
Alphabet : ensemble fini de symboles

$\mathcal{A} = \{$ ,  $\}$

Un ensemble $\mathcal{F}$ de motifs (finis) interdits :

$\mathcal{F} = \{$ ,  $\}$

Configuration : $\mathcal{A}$-coloriage de $\mathbb{Z}^d$ sans motif interdit



Définition

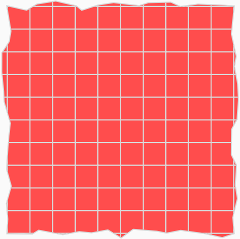
Alphabet : ensemble fini de symboles

$$\mathcal{A} = \{ \blacksquare, \textcolor{red}{\blacksquare} \}$$

Un ensemble $\mathcal{F}$ de motifs (finis) interdits :

$$\mathcal{F} = \{ \begin{smallmatrix} \blacksquare \\ \textcolor{red}{\blacksquare} \end{smallmatrix}, \blacksquare\textcolor{red}{\blacksquare} \}$$

Configuration : $\mathcal{A}$-coloriage de $\mathbb{Z}^d$ sans motif interdit



Définition

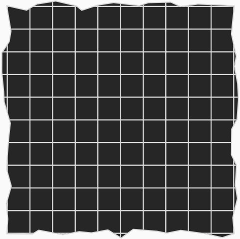
Alphabet : ensemble fini de symboles

$$\mathcal{A} = \{ \;,\; \}$$

Un ensemble $\mathcal{F}$ de motifs (finis) interdits :

$$\mathcal{F} = \{ \;,\; \}$$

Configuration : $\mathcal{A}$-coloriage de $\mathbb{Z}^d$ sans motif interdit



Définition

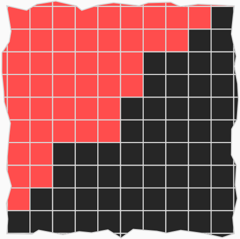
Alphabet : ensemble fini de symboles

$\mathcal{A} = \{$ ,  $\}$

Un ensemble $\mathcal{F}$ de motifs (finis) interdits :

$\mathcal{F} = \{$ ,  $\}$

Configuration : $\mathcal{A}$-coloriage de $\mathbb{Z}^d$ sans motif interdit



Définition

Alphabet : ensemble fini de symboles

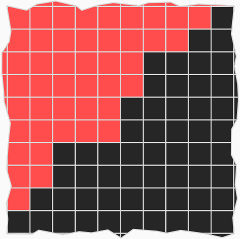
$\mathcal{A} = \{$  $\}$

Un ensemble $\mathcal{F}$ de motifs (finis) interdits :

$\mathcal{F} = \{$  $\}$

Sous-shift $X_{\mathcal{F}}$: l'ensemble des configurations valides.

Configuration : $\mathcal{A}$-coloriage de $\mathbb{Z}^d$ sans motif interdit



Définition

Alphabet : ensemble fini de symboles

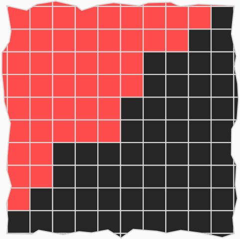
$\mathcal{A} = \{$ ,  $\}$

Un ensemble $\mathcal{F}$ de motifs (finis) interdits :

$\mathcal{F} = \{$ ,  $\}$

Sous-shift $X_{\mathcal{F}}$: l'ensemble des configurations valides.

Configuration : $\mathcal{A}$-coloriage de $\mathbb{Z}^d$ sans motif interdit



Pour $\mathcal{F}$ ...

- Fini : **Sous-shift de Type Fini**
- Énumérable : **effectif**

Sous-shifts et complexités

Objet élémentaire, mais riche :

- Systèmes dynamiques
- Questions algorithmiques : compter les motifs, les générer efficacement
- Questions géométriques : $\mathbb{R}^d$, espaces plus complexes (surfaces branchées, groupes hyperboliques ...)

Sous-shifts et complexités

Objet élémentaire, mais riche :

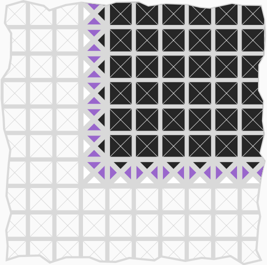
- Systèmes dynamiques
- Questions algorithmiques : compter les motifs, les générer efficacement
- Questions géométriques : $\mathbb{R}^d$, espaces plus complexes (surfaces branchées, groupes hyperboliques ...)

Question

À quel point peut-on **construire** des pavages "complexes" ?

Facteurs et conjugaisons

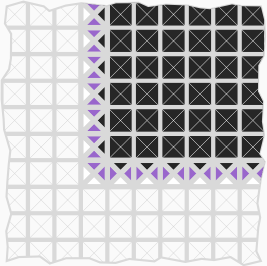
$\mathcal{A} = \{$  $\}$



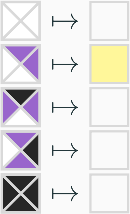
Facteurs et conjugaisons

$\mathcal{A} = \{$  $\}$

$\mathcal{B} = \{$ $\}$

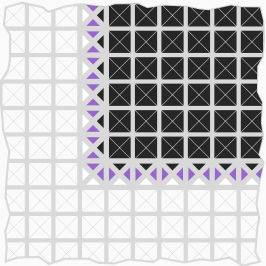


$\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

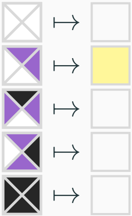


Facteurs et conjugaisons

$\mathcal{A} = \{$  $\}$ $\mathcal{B} = \{$ $\}$



$\phi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$



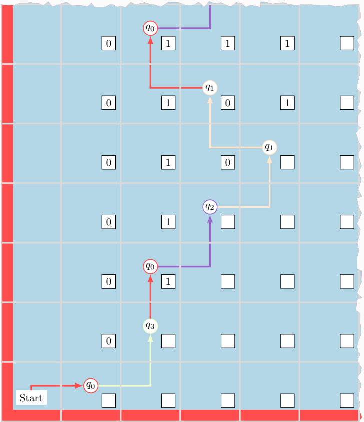
Factorisation $\Phi \colon X \to Y$ = application de ϕ en tout point de $\mathbb{Z}^2$.

Cas particulier : facteur d'un SFT = **sofique**.

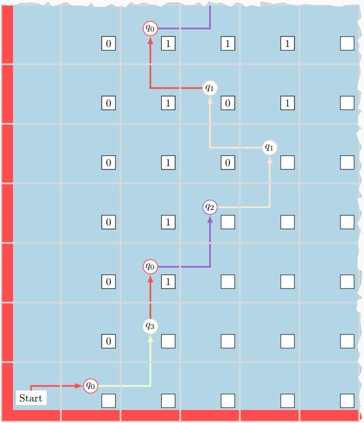
S'il existe un facteur inverse, X, Y sont dits **conjugués**.

$\rightarrow$ On s'intéresse aux quantités **invariantes** par conjugaison.

Diagrammes espace-temps d'une machine de Turing $M \to$ SFT X_M.



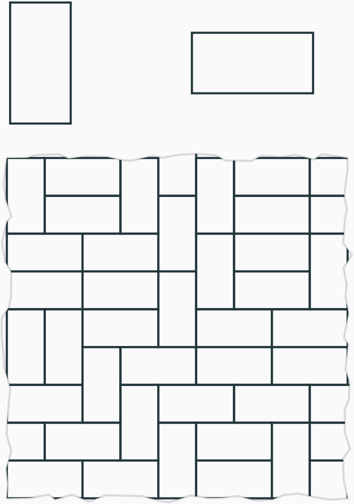
Diagrammes espace-temps d'une machine de Turing $M \to$ SFT X_M.



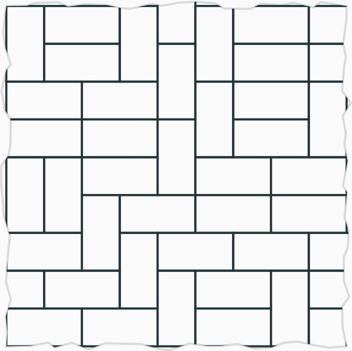
Théorème informel : $X_M = \emptyset$ si et seulement si M s'arrête.

Groupe fondamental projectif

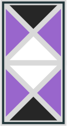
Premier exemple : le modèle des dimères

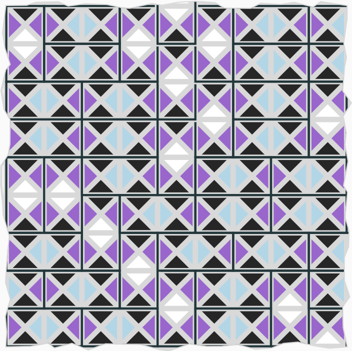


Premier exemple : le modèle des dimères

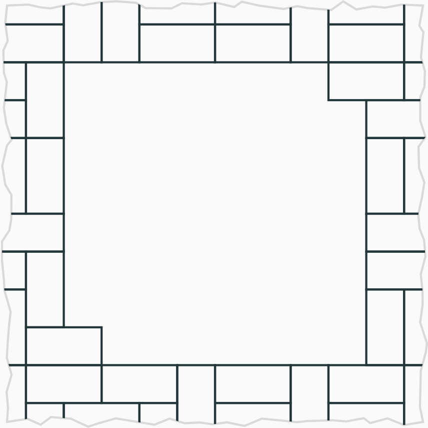


Premier exemple : le modèle des dimères

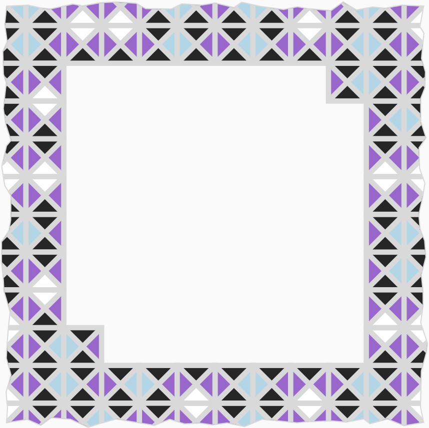




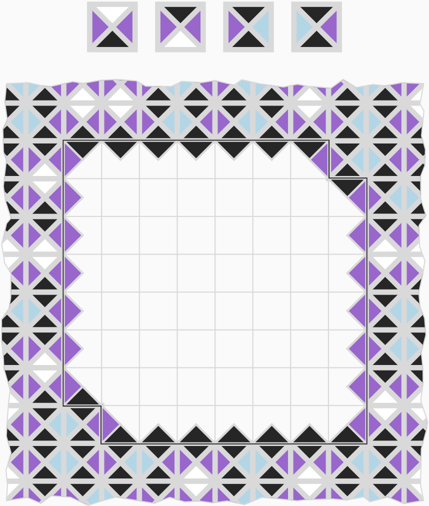
Configuration partielle : échiquier mutilé



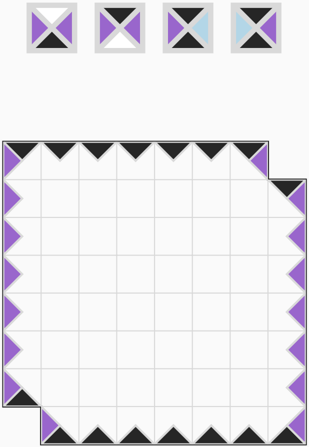
Configuration partielle : échiquier mutilé



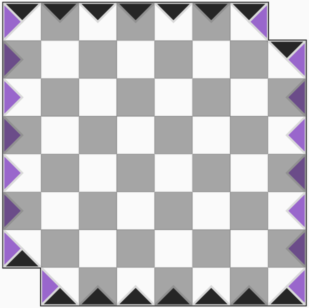
Configuration partielle : échiquier mutilé

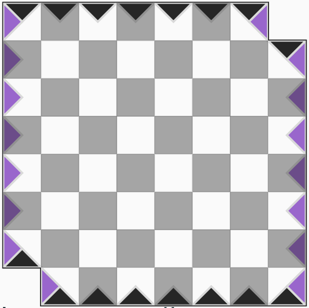


Configuration partielle : échiquier mutilé



Configuration partielle : échiquier mutilé





On cherche à généraliser ce type d'arguments de parité/comptage.

Présentation d'un groupe

On peut décrire un groupe Γ par une **présentation**, notée $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$:

- S est l'alphabet des générateurs de Γ (et leurs inverses formels)
- Un élément $g \in \Gamma$ = un mot sur S
- R est un ensemble de relations = des mots triviaux dans Γ

Présentation d'un groupe

On peut décrire un groupe Γ par une **présentation**, notée $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$:

- S est l'alphabet des générateurs de Γ (et leurs inverses formels)
- Un élément $g \in \Gamma$ = un mot sur S
- R est un ensemble de relations = des mots triviaux dans Γ

Exemple avec $\mathbb{Z}^2 = \left\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \right\rangle$: $aba = a\,aba^{-1}b^{-1}\,ba = aab$

Présentation d'un groupe

On peut décrire un groupe Γ par une **présentation**, notée $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$:

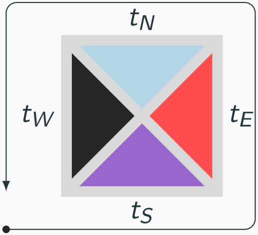
- S est l'alphabet des générateurs de Γ (et leurs inverses formels)
- Un élément $g \in \Gamma$ = un mot sur S
- R est un ensemble de relations = des mots triviaux dans Γ

Exemple avec $\mathbb{Z}^2 = \left\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \right\rangle$: $aba = a\color{red}{aba^{-1}b^{-1}}\color{black}{ba} = aab$

Un groupe Γ est **finiment présenté** s'il admet une présentation $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$ avec S, R finis.

Mots de contour, groupe de Conway

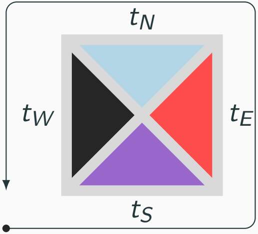
Pour un sous-shift défini avec un ensemble $\mathcal{A}$ de tuiles colorées par des couleurs de C :



$$\Gamma(\mathcal{A}) = \left\langle C \mid t_W^{-1} t_N^{-1} t_E t_S, t = (t_W, t_S, t_E, t_N) \in T \right\rangle$$

Mots de contour, groupe de Conway

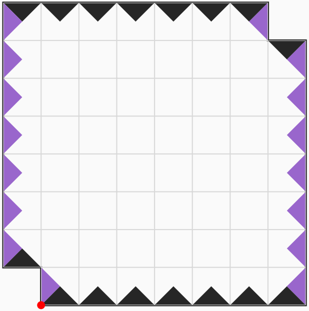
Pour un sous-shift défini avec un ensemble $\mathcal{A}$ de tuiles colorées par des couleurs de C :



$$\Gamma(\mathcal{A}) = \left\langle C \mid t_W^{-1} t_N^{-1} t_E t_S, t = (t_W, t_S, t_E, t_N) \in T \right\rangle$$

Le contour d'un motif valide dans $x \in X$ valide $\rightarrow$ identité de $\Gamma(\mathcal{A})$.

Contour et échiquier mutilé



Début du contour

$$\begin{aligned} g &= t_{\color{purple}\blacksquare}^{-1} t_{\blacksquare}^{-1} t_{\color{purple}\blacksquare}^{-7} t_{\blacksquare}^{-7} t_{\color{purple}\blacksquare} t_{\blacksquare} t_{\color{purple}\blacksquare}^{7} t_{\blacksquare}^{7} \\ &= \dots \\ &\neq 1 \rightarrow \text{ Pas remplissable de façon valide.} \end{aligned}$$

Quelques limites du groupe de Conway

Idée qui généralise beaucoup d'arguments de type “comptage”, mais :

- Dépend fortement de l'alphabet du sous-shift
- Pas invariant par conjugaison
- S'adapte mal aux sous-shifts plus généraux que les SFT

Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

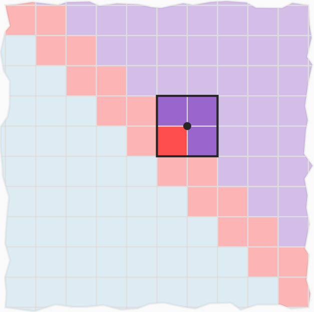
- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

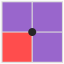
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



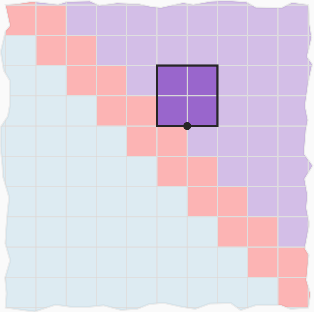


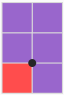
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



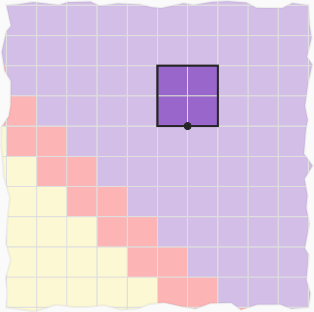


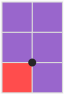
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la “fusion” de deux motifs consécutifs est valide dans X



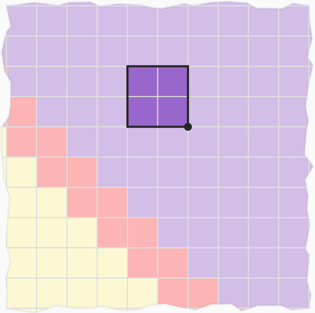


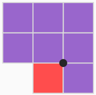
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



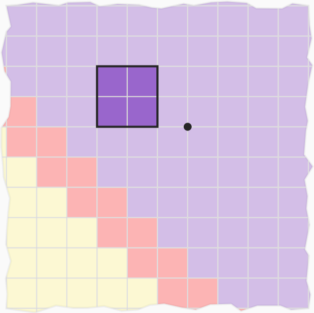


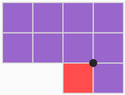
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



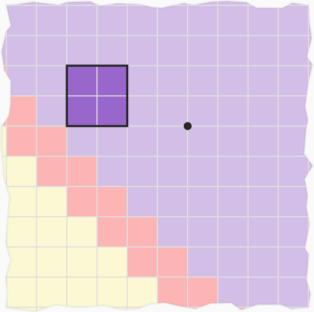


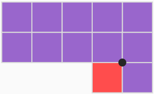
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



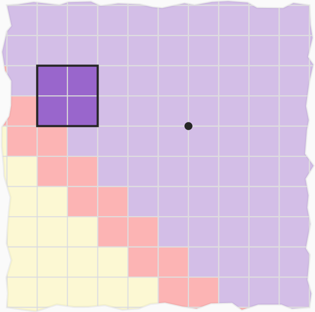


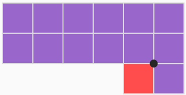
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



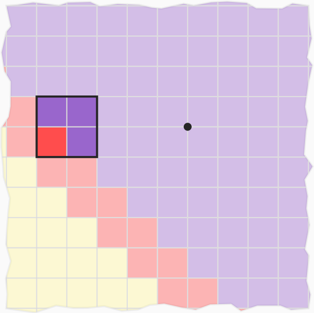


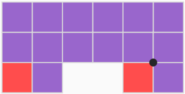
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



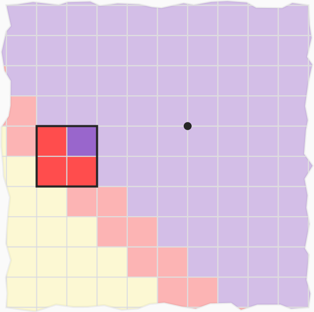


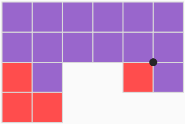
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X

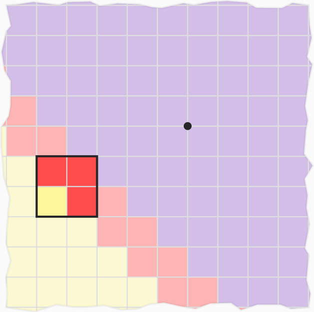


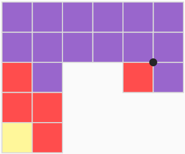


Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



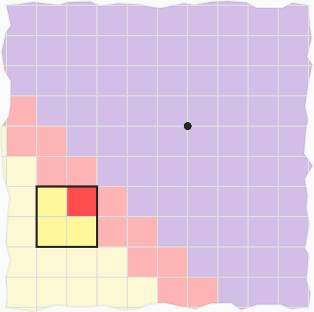


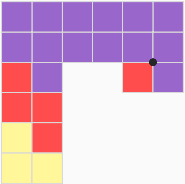
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



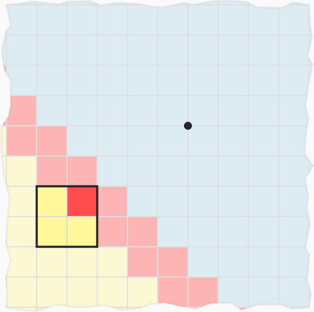


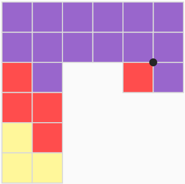
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



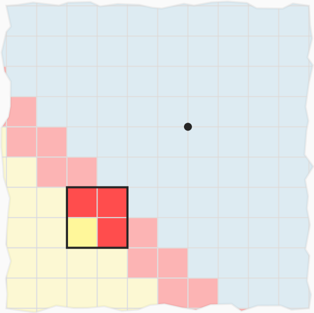


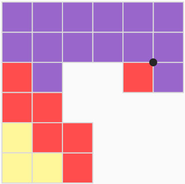
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



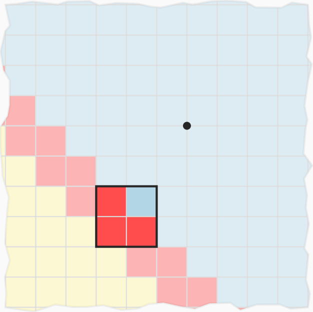


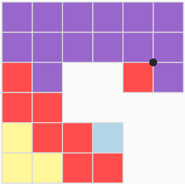
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X



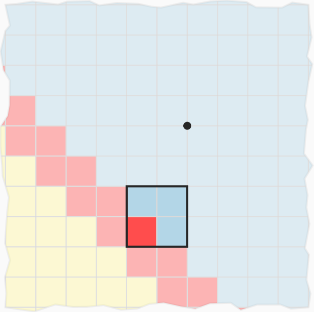


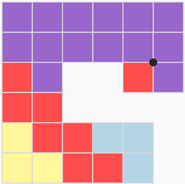
Chemins

Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X

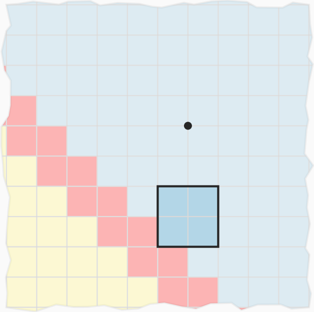


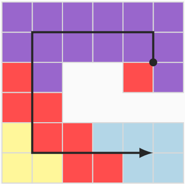


Plutôt que de considérer seulement les côtés des tuiles, on considère des suites de *motifs*. Un B-**chemin** est la donnée :

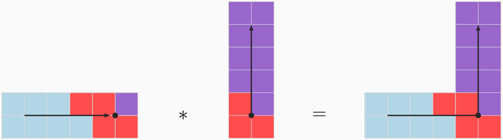
- D'une **trajectoire** dans $\mathbb{Z}^2$
- Et d'un motif de support B associé à chacun

Condition : la "fusion" de deux motifs consécutifs est valide dans X

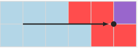
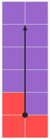
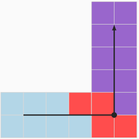


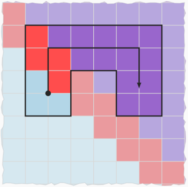
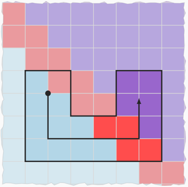


Une structure de groupe

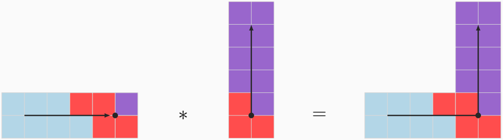


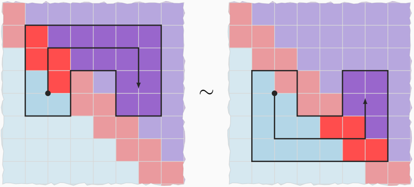
Une structure de groupe

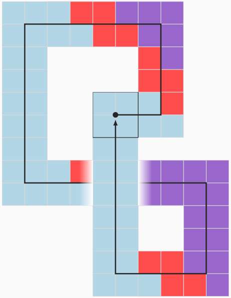
 $*$  $=$ 

 $\sim$ 

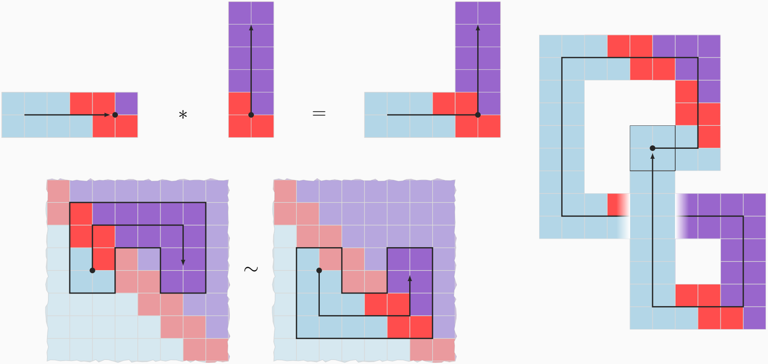
Une structure de groupe







Une structure de groupe



Définition

Pour $B \subset_f \mathbb{Z}^2$, on définit $\pi_1^B(X)$ comme le groupe des boucles, à déformation près.

Groupe fondamental projectif

Difficulté: se passer de la dépendance en B. On peut obtenir un *unique* groupe, $\pi_1^{proj}(X)$, invariant par conjugaison (Geller, Propp 95 [GP95]).

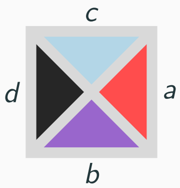
Difficulté: se passer de la dépendance en B. On peut obtenir un *unique* groupe, $\pi_1^{proj}(X)$, invariant par conjugaison (Geller, Propp 95 [GP95]).

Question

Quels sont les groupes réalisables comme $\pi_1^{proj}(X)$ pour X un SFT de $\mathbb{Z}^2$?

Groupes finis ?

Construction de [GP95]: si G fini, pour chaque égalité $ab = cd$ dans le groupe, on a dans l'alphabet un symbole

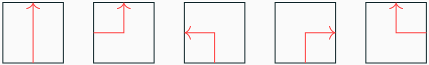


$$d^{-1}c^{-1}ab = 1$$

Théorème — P., Vanier (MFCS 2023) [PV23]

Si $G = \langle S \mid R \rangle$ est un groupe finiment présenté, il existe un SFT X_G tel que $\pi_1^{proj}(X_G) \simeq G$.

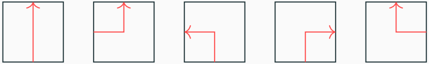
- Pour $s \in S$, on ajoute ces symboles à l'alphabet de X_G :



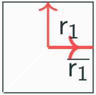
Théorème — P., Vanier (MFCS 2023) [PV23]

Si $G = \langle S \mid R \rangle$ est un groupe finiment présenté, il existe un SFT X_G tel que $\pi_1^{proj}(X_G) \simeq G$.

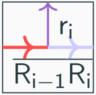
- Pour s $\in S$, on ajoute ces symboles à l'alphabet de X_G :



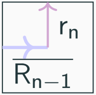
- Pour $r_1 r_2 \ldots r_n \in R$: on pose $\overline{R_i} = \overline{r_1 r_2 \ldots r_i}$ et on ajoute :



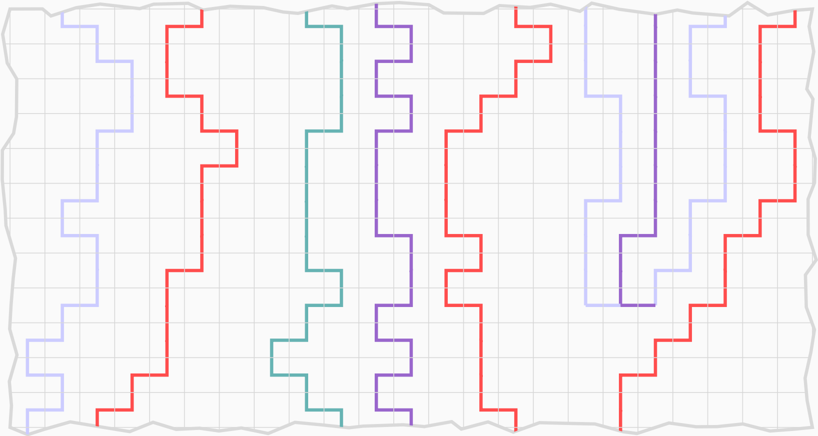
Début



Pour $2 \leq i < n$



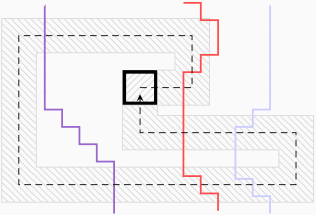
Fin



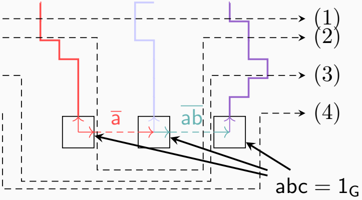
Boucles équivalentes

On associe un élément de G à chaque boucle.

$$\text{Boucles équivalentes} \implies \text{même élément de } G$$

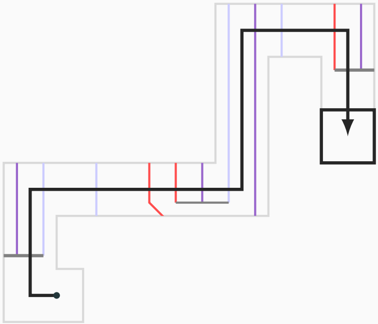


$bb^{-1}a^{-1}abcc^{-1}b^{-1} =_G 1_G.$

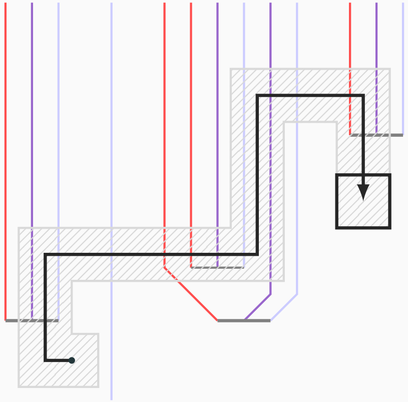


$abc = aa^{-1}(ab)c = (ab)c = 1_G$

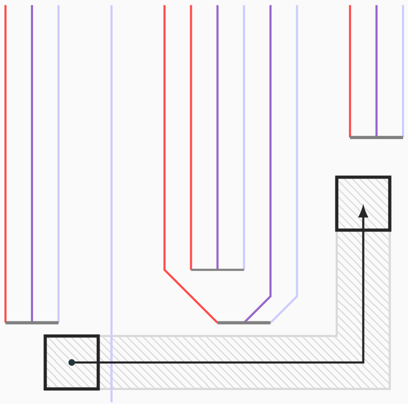
Déformations



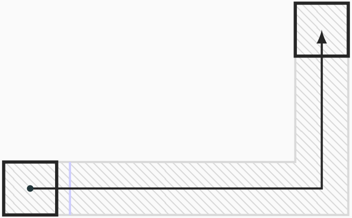
Déformations



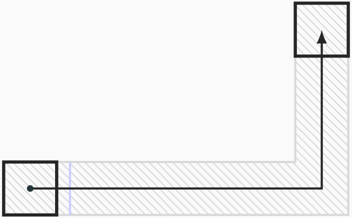
Déformations



Déformations



Déformations



Une suite de telles opérations permet de montrer que toutes les boucles associées au même élément de G sont équivalentes.

Conclusion sur le groupe fondamental projectif

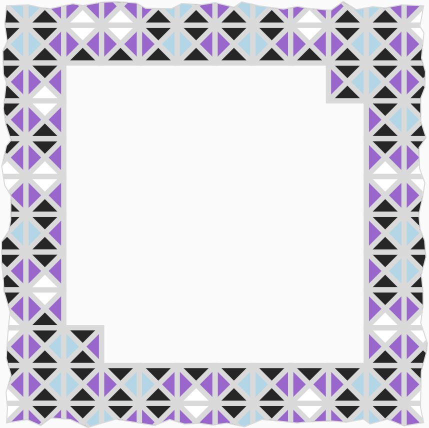
Outil intéressant : formalise beaucoup d'arguments/méthodes pour répondre aux questions de "pavages à trous", de façon robuste, .
Mais :

- Difficile à calculer (cas particulier des Hom-shifts)
- Peut être n'importe groupe finiment présenté (même pour un SFT): tout reste incalculable
- Beaucoup de questions restent ouvertes (Groupe bien défini ? Caractérisation complète ? Équivalence élément neutre $\iff$ trou "remplissable" ?)

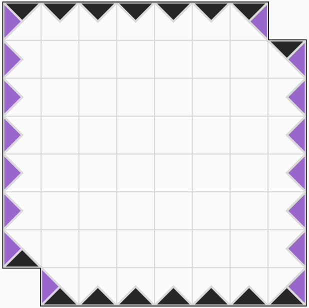
Entropie d'extension

Seconde approche : étendre des motifs

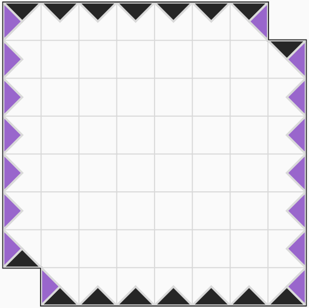
Retour sur les dimères :



Retour sur les dimères :



Retour sur les dimères :



Renverse l'observation : tous les motifs de même bord sont équivalents vis-à-vis de leur extensibilité.

Généralisation : extensions de motifs

Objectif: caractériser les motifs équivalents pour la relation d'extensibilité:

$w \sim w' \iff$ on peut échanger w et w' dans tout motif valide (en particulier : w, w' de même support).

Généralisation : extensions de motifs

Objectif: caractériser les motifs équivalents pour la relation d'extensibilité:

$w \sim w' \iff$ on peut échanger w et w' dans tout motif valide (en particulier : w, w' de même support).

On note $E_X(n)$ le nombre de **classes** de motifs équivalents de taille n = motifs librement échangeables dans X.

Cas des SFT et croissance de $E_X(n)$

Jusqu'à $\mathcal{A}^{n^d}$ motifs sur $\{0, \ldots, n-1\}^d$. Dans un SFT, l'extension ne dépend que du bord du motif $\implies E_X(n) = o(|\mathcal{A}|^{n^d})$ classes.

Cas des SFT et croissance de $E_X(n)$

Jusqu'à $\mathcal{A}^{n^d}$ motifs sur $\{0, \ldots, n-1\}^d$. Dans un SFT, l'extension ne dépend que du bord du motif $\implies E_X(n) = o(|\mathcal{A}|^{n^d})$ classes.

Théorème — Ormes, Pavlov [OP16]

Pour $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un sous-shift quelconque, s'il existe $n > 0$ tel que $E_X(n) \leq n$ alors X est sofique.
Sur $\mathbb{Z}$, c'est une équivalence.

Jusqu'à $\mathcal{A}^{n^d}$ motifs sur $\{0, \ldots, n-1\}^d$. Dans un SFT, l'extension ne dépend que du bord du motif $\implies E_X(n) = o(|\mathcal{A}|^{n^d})$ classes.

Théorème — Ormes, Pavlov [OP16]

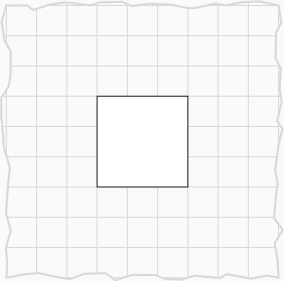
Pour $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un sous-shift quelconque, s'il existe $n > 0$ tel que $E_X(n) \leq \boxed{n}$ alors X est sofique.
Sur $\mathbb{Z}$, c'est une équivalence.

Question

Quels sont les comportements asymptotiques possibles de E_X pour différents sous-shifts X ?

Un exemple sofique

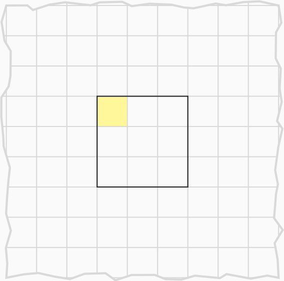
Exemple : X = configurations sur $\{\square, \square\}$ avec ≤ 1 cases jaunes.



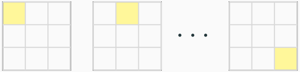
Première classe :

Un exemple sofique

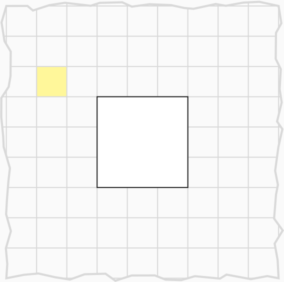
Exemple : X = configurations sur $\{\square, \square\}$ avec ≤ 1 cases jaunes.



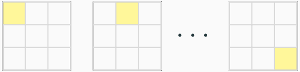
Première classe :



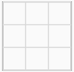
Exemple : X = configurations sur $\{\square, \square\}$ avec ≤ 1 cases jaunes.



Première classe :



Seconde classe :



$E_X(n) = 2$ pour tout n : X est sofique.

La suite $(E_X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une mesure trop fine, mais on peut définir un invariant à partir de sa croissance :

Définition : Entropie d'extension French, Pavlov [FP19]

L'**entropie d'extension** d'un sous-shift X de $\mathbb{Z}^d$ est

$$h_E(X) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log E_X(n)}{n^d} = \inf_{n\to+\infty} \frac{\log E_X(n)}{n^d}$$

La suite $(E_X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une mesure trop fine, mais on peut définir un invariant à partir de sa croissance :

Définition : Entropie d'extension — French, Pavlov [FP19]

L'**entropie d'extension** d'un sous-shift X de $\mathbb{Z}^d$ est

$$h_E(X) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log E_X(n)}{n^d} = \inf_{n\to+\infty} \frac{\log E_X(n)}{n^d}$$

Invariant de conjugaison ($d = 1$ [FP19], d $\geq$ 2 dans **callard_paviet_vanier24_comput_exten_sets_multid_subsh**
$0 \leq h_E(X) \leq \log \mathcal{A}$, et vaut 0 si X est un SFT :

$$E_X(n) \sim |\mathcal{A}|^{h_E(x) n^d}$$

Calculabilité sur les réels

Comment quantifier la complexité d'un nombre réel ?

Calculabilité sur les réels

Comment quantifier la complexité d'un nombre réel ?
Idée : $\alpha \in \mathbb{R}$ est calculable si l'on sait l'approximer, $|\alpha - r_n| < 2^{-n}$ avec (r_n) calculable.
Sans l'hypothèse de calculabilité de (r_n), on obtient des réels non calculables :

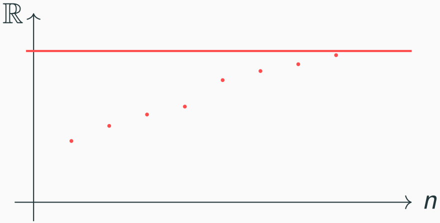
$$\Pi_n = \inf_{k_1} \sup_{k_2} \inf_{k_3} \dots r_{k_1,\dots,k_n} \subset \mathbb{R}$$

Calculabilité sur les réels

Comment quantifier la complexité d'un nombre réel ?
Idée : $\alpha \in \mathbb{R}$ est calculable si l'on sait l'approximer, $|\alpha - r_n| < 2^{-n}$ avec (r_n) calculable.
Sans l'hypothèse de calculabilité de (r_n), on obtient des réels non calculables :

$$\Pi_n = \inf_{k_1} \sup_{k_2} \inf_{k_3} \ldots r_{k_1,\ldots,k_n} \subset \mathbb{R}$$

Exemple d'un $\alpha \in \Pi_2$:



Comment quantifier la complexité d'un nombre réel ?
Idée : $\alpha \in \mathbb{R}$ est calculable si l'on sait l'approximer, $|\alpha - r_n| < 2^{-n}$ avec (r_n) calculable.
Sans l'hypothèse de calculabilité de (r_n), on obtient des réels non calculables :

$$\Pi_n = \inf_{k_1} \sup_{k_2} \inf_{k_3} \dots r_{k_1,\dots,k_n} \subset \mathbb{R}$$

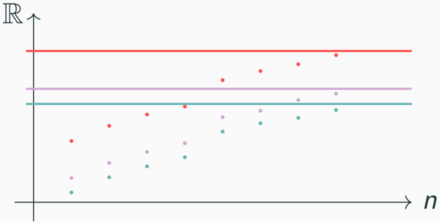
Exemple d'un $\alpha \in \Pi_2$:

Calculabilité sur les réels

Comment quantifier la complexité d'un nombre réel ?
Idée : $\alpha \in \mathbb{R}$ est calculable si l'on sait l'approximer, $|\alpha - r_n| < 2^{-n}$ avec (r_n) calculable.
Sans l'hypothèse de calculabilité de (r_n), on obtient des réels non calculables :

$$\Pi_n = \inf_{k_1} \sup_{k_2} \inf_{k_3} \dots r_{k_1,\dots,k_n} \subset \mathbb{R}$$

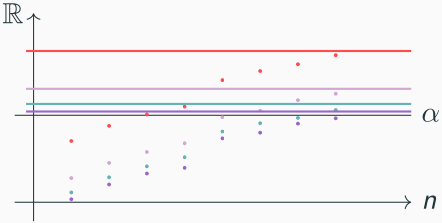
Exemple d'un $\alpha \in \Pi_2$:



Comment quantifier la complexité d'un nombre réel ?
Idée : $\alpha \in \mathbb{R}$ est calculable si l'on sait l'approximer, $|\alpha - r_n| < 2^{-n}$ avec (r_n) calculable.
Sans l'hypothèse de calculabilité de (r_n), on obtient des réels non calculables :

$$\Pi_n = \inf_{k_1} \sup_{k_2} \inf_{k_3} \dots r_{k_1,\dots,k_n} \subset \mathbb{R}$$

Exemple d'un $\alpha \in \Pi_2$:



Tout est incalculable

5) callard_paviet_vanier24_comput_exten_sets_multid_subsh

Les entropies d'extension des sous-shifts effectifs de $\mathbb{Z}$ sont exactement les réels Π_3 positifs.

5) callard_paviet_vanier24_comput_exten_sets_multid_subsh

Les entropies d'extension des sous-shifts sofiques de $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 2$ sont exactement les réels Π_3 positifs.

Sens facile : $h_E(X) \in \Pi_3$

Idée de construction

$$h_E(X) = \alpha \in \Pi_3$$

Idée de construction

$$h_E(X) = \alpha \in \Pi_3$$

$$\inf_n \frac{E_X(n)}{n^d}$$

Idée de construction

$$h_E(X) = \alpha \in \Pi_3$$

$$\inf_n \frac{E_X(n)}{n^d} \qquad \qquad \inf_n \sup_i \inf_j \alpha_{n,i,j}$$

Idée de construction

$$h_E(X) = \alpha \in \Pi_3$$

$\inf_n \frac{E_X(n)}{n^d}$ $\qquad\qquad$ $\inf_n \sup_i \inf_j \alpha_{n,i,j}$

Idée de construction

$$h_E(X) = \alpha \in \Pi_3$$

$$\inf_n \frac{\#\text{ Motifs de taille } n}{n^d} \qquad\qquad \inf_n \sup_i \inf_j \alpha_{n,i,j}$$

Idée de construction

$$h_E(X) = \alpha \in \Pi_3$$

$$\inf_n \frac{\#\text{ Motifs de taille } n}{n^d} \qquad\qquad \inf_n \sup_i \inf_j \alpha_{n,i,j}$$

$$+$$

$$\#\text{Motifs de taille } n \approx E_X(n)$$

$\rightarrow$ Peu de motifs interchangeables.

Construction en bref (effectif sur $\mathbb{Z}$)

- Périodicité: obtient #Motifs de taille $n \approx E_X(n)$

Construction en bref (effectif sur $\mathbb{Z}$)

- Périodicité: obtient #Motifs de taille $n \approx E_X(n)$

Construction en bref (effectif sur $\mathbb{Z}$)

- Périodicité: obtient #Motifs de taille $n \approx E_X(n)$

Construction en bref (effectif sur $\mathbb{Z}$)

- Périodicité: obtient #Motifs de taille $n \approx E_X(n)$

Construction en bref (effectif sur $\mathbb{Z}$)

- Périodicité: obtient #Motifs de taille $n \approx E_X(n)$

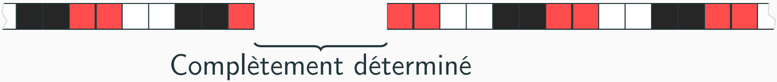
Construction en bref (effectif sur $\mathbb{Z}$)

- Périodicité: obtient #Motifs de taille $n \approx E_X(n)$

Complètement déterminé

Construction en bref (effectif sur $\mathbb{Z}$)

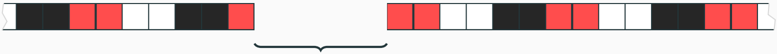
- Périodicité: obtient #Motifs de taille $n \approx E_X(n)$



- Nombre de motifs $\approx 2^{\alpha_n}$:

Construction en bref (effectif sur $\mathbb{Z}$)

- Périodicité: obtient #Motifs de taille $n \approx E_X(n)$

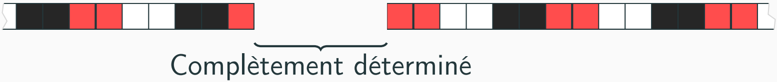


Complètement déterminé

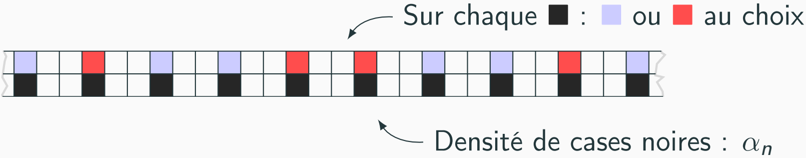
- Nombre de motifs $\approx 2^{\alpha_n}$:

Densité de cases noires : α_n

- Périodicité: obtient #Motifs de taille $n \approx E_X(n)$



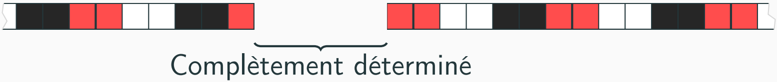
- Nombre de motifs $\approx 2^{\alpha_n}$:



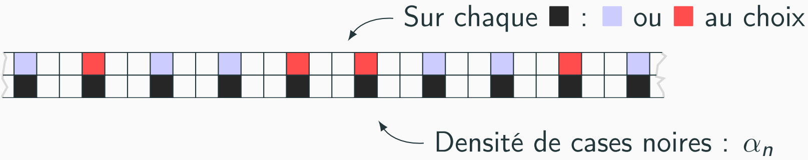
Proportion α_n des cases comptent pour l'extension du motif.

Construction en bref (effectif sur $\mathbb{Z}$)

- Périodicité: obtient #Motifs de taille $n \approx E_X(n)$



- Nombre de motifs $\approx 2^{\alpha_n}$:



Proportion α_n des cases comptent pour l'extension du motif.

Beaucoup de détails cachés (α_n pas calculable, adaptation aux sofiques multidimensionnels ...)

Résumé sur les entropies d'extension

Exemple supplémentaire d'invariant :

- Complètement caractérisé par la calculabilité
- Pour lequel les sous-shift sofiques sont "aussi complexes" que les effectifs
- Très différent en $d = 1$ et $d \geq 2$ pour les sous-shifts sofiques

Exemple supplémentaire d'invariant :

- Complètement caractérisé par la calculabilité
- Pour lequel les sous-shift sofiques sont "aussi complexes" que les effectifs
- Très différent en $d = 1$ et $d \geq 2$ pour les sous-shifts sofiques

Résumé des caractérisations :

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^{d\geq 2}$
SFT	$\{0\}$	
Sofique	$\{0\}$	Π_3
Effectif	Π_3	
Calculable	Π_2	
Effectif et minimal	Π_1	
Effectif and 1-Mélangeant/Block-Gluing$^{(*)}$	Π_3	

Conclusion

Mise en évidence de la forte expressivité des sous-shifts de $\mathbb{Z}^2$ en tant que modèle de calcul :

- Nombreux problèmes indécidables
- Caractérisation complète de certains invariants à l'aide de la calculabilité, ou obtention de "bornes inférieures" pour d'autres (que dire sur les bornes supérieures ?)
- D'autres résultats, notamment sur des sous-shifts de graphes et des substitutions.

Conclusion

Mise en évidence de la forte expressivité des sous-shifts de $\mathbb{Z}^2$ en tant que modèle de calcul :

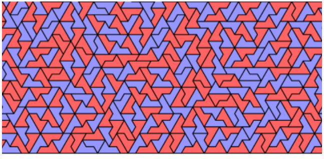
- Nombreux problèmes indécidables
- Caractérisation complète de certains invariants à l'aide de la calculabilité, ou obtention de "bornes inférieures" pour d'autres (que dire sur les bornes supérieures ?)
- D'autres résultats, notamment sur des sous-shifts de graphes et des substitutions.

Suite possible : étude plus systématique du **groupe plein**, invariant algèbrique avec des forts liens avec la calculabilité.

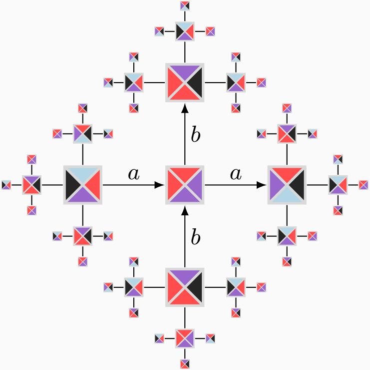
Dans quelle mesure peut-on adapter les résultats des sous-shifts de $\mathbb{Z}^2$ aux sous-shifts définis sur d'autres espaces ?

Première question : quel *cadre* pour définir ces sous-shifts ?

$\mathbb{R}^d$

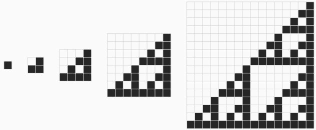


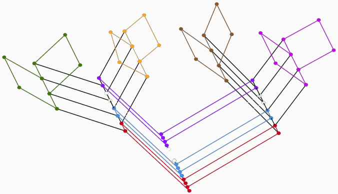
Groupes

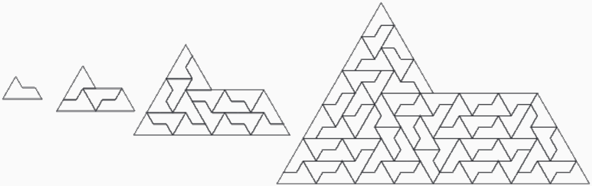


Pavages substitutifs

Le résultat que l'on cherche à généraliser porte sur les sous-shifts **substitutifs**.







Méta-théorème de Mozes

Meta-Théorème : Mozes

Tout sous-shift substitutif raisonnable est sofique.

Méta-théorème de Mozes

Meta-Théorème : Mozes

Tout sous-shift substitutif raisonnable est sofique.

Méta-théorème de Mozes

Meta-Théorème : Mozes

Tout sous-shift substitutif raisonnable est sofique.

Vérifié avec des preuves et des hypothèses similaires dans :

- $\mathbb{Z}^d$ [Moz89], [BS16]
- $\mathbb{R}^d$ [Goo98], [FO10]
- Groupes de Baumslag-Solitar $BS(1, N)$ [Sil20]

Question

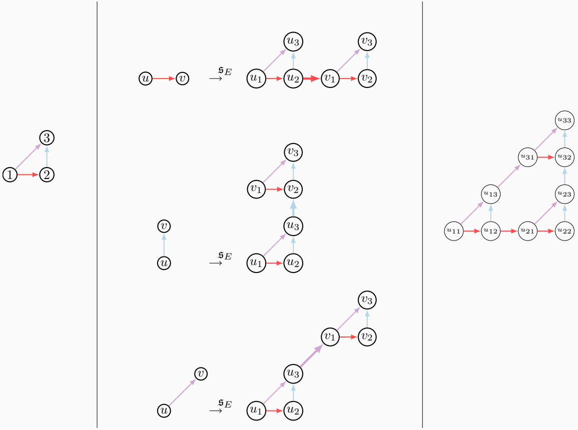
Hypothèses minimales sur l'espace sous-jacent pour que la méta-preuve fonctionne ?

Sous-shift substitutifs sur les graphes

On utilise un formalisme de L-systèmes généralisés (Knapik [Kna24]) : on substitue un sommet en graphe, les arêtes en ensemble d'arêtes entre ces graphes.

Sous-shift substitutifs sur les graphes

On utilise un formalisme de *L*-systèmes généralisés (Knapik [Kna24]) : on substitue un sommet en graphe, les arêtes en ensemble d'arêtes entre ces graphes.



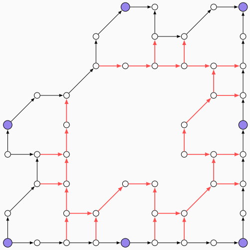
Théorème

Pour $\mathfrak{s}$ une graphe-substitution quasi-connexe et $X_{\mathfrak{s}}$ associé, il existe $Y_{\mathfrak{s}} \supseteq X_{\mathfrak{s}}$ un sous-shift sofique $X_{\mathfrak{s}}$-feuilleté.

Graphes substitutifs presque sofiques

Théorème

Pour $\mathfrak{s}$ une graphe-substitution quasi-connexe et $X_\mathfrak{s}$ associé, il existe $Y_\mathfrak{s} \supseteq X_\mathfrak{s}$ un sous-shift sofique $X_\mathfrak{s}$-feuilleté.



Graphes substitutifs presque sofiques

Théorème

Pour $\mathfrak{s}$ une graphe-substitution quasi-connexe et $X_\mathfrak{s}$ associé, il existe $Y_\mathfrak{s} \supseteq X_\mathfrak{s}$ un sous-shift sofique $X_\mathfrak{s}$-feuilleté.